УДК 514.76
DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-4

Г. А. Султанова

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

Аннотация.

Актуальность и цели. Одной из важных задач в теории расслоенных пространств является изучение инфинитезимальных автоморфизмов связностей в этих пространствах. Инфинитезимальные изометрии в касательных расслоениях изучались Ш. Сасаки. Вопросы о каноническом разложении инфинитезимального аффинного преобразования рассматривались К. Яно и Ш. Кобаяси. Среди отечественных ученых Х. Шадыев исследовал движения в касательных расслоениях первого порядка с синектической связностью. В данной работе рассмотрены касательные расслоения со связностью полного лифта в случае, когда база расслоения является максимально подвижным двумерным пространством аффинной связности. Исседован один из типов двумерных пространств аффинной связности, полученных И. П. Егоровым, группы движений которых имеют максимальную размерность 4. Построена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ и решен вопрос о разрешимости данной алгебры.

Материалы и методы. Объектом изучения является пространство $(TM, \nabla^{(0)})$. Использованы методы тензорного анализа, теории производной Ли. Многообразие, функции, тензорные поля предполагаются гладкими класса C^{∞}.

Результаты. Приведена оценка сверху групп движений касательного расслоения TM_2, снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны. Построена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над многообразием M_2 с соотвествующими компонентами связности и решена задача о разрешимости данной алгебры.

Выводы. Алгебра Ли $\tilde{L}$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇), определяемым коэффициентами связности (6), является разрешимой.

Ключевые слова: аффинные преобразования, алгебра Ли, касательные расслоения, автоморфизм.

G. A. Sultanova

ON LIE ALGEBRAS OF INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS IN TANGENT BUNDLES WITH A COMPLETE LIFT CONNECTION

Abstract.

Background. The study of infinitesimal automorphisms of connections in the fiber spaces is one of the important problems in the theory of these spaces. The infini-

tesimal isometrics of tangent bundles were studied by S. Sasaki. Yano and Kobayashi considered the questions about the canonical decomposition of infinitesimal affine transformations. Among Russian scientists H. Shadyev saw movement in tangent bundles of the first order with synectic connection. In this paper we consider the tangent bundles with a complete lift connection, where the base of the bundle is the most moving two-dimensional space of affine connection. We study one of the types of two-dimensional spaces with affine connection obtained by I. P. Egorov whose movement groups have a maximum dimension of 4. We built algebra of infinitesimal automorphisms of spaces $(TM_2, \nabla^{(0)})$ and clarified the question of solvability of this algebra.

Materials and methods. The object of study is the space $(TM, \nabla^{(0)})$. We are using the methods of the tensor calculus, the theory of Lie derivative. The variety, function, tensor fields are assumed to be smooth of class C^∞.

Results. We give an estimate from above of groups of motions of the tangent bundle TM_2, equipped with a complete mobile lift maximum-affine connection with a non-zero curvature tensor field. In the same section we are building Lie algebra of infinitesimal automorphisms of spaces $(TM_2, \nabla^{(0)})$ over a manifold M_2 of connectivity with the appropriate components, and solve the problem of solvability of this algebra.

Conclusions. The Lie algebra $\tilde{L}$ of infinitesimal affine transformations of the space $(TM_2, \nabla^{(0)})$ above the maximum-moving two-dimensional space (M_2, ∇), defined by the connection coefficients (6), is solvable.

Key words: affine transformations, Lie algebra, tangent bundles, automorphism.

Введение

Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных расслоениях первого порядка, снабженных связностью полного лифта, изучались К. Яно, Ш. Кобаяси [1]. Вопрос о каноническом разложении инфинитезимальных аффинных преобразований рассматривал Х. Шадыев для синектических связностей на касательных расслоениях первого порядка [2].

В настоящей работе изучается строение алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта. Поскольку изучение группы движений двумерных пространств аффинной связности занимает особое место в теории движений, мы исследуем алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований над проективно плоскими, но не плоскими двумерными пространствами аффинной связности, допускающими группы движений максимальной размерности 4. При этом используем классификацию таких пространств, полученных И. П. Егоровым [3].

1. Предварительные сведения

Пусть M – гладкое многообразие класса C^∞ размерности n, TM – его касательное расслоение с канонической проекцией π. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM. Если x^i – локальные координаты в некоторой окрестности $U \subset M$, то на $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают

естественные локальные координаты x_0^i, x_1^i. Закон преобразования этих координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ имеет вид [3, 4]:

$$\begin{cases} \overline{x}_0^i = \overline{x}_0^i\left(x_0^1, ..., x_0^n\right), \\ \overline{x}_1^i = \left(\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\right)_{(0)} x_1^k. \end{cases} \quad (1)$$

Приведем определения лифтов некоторых объектов с многообразия M в касательное расслоение TM, которые мы будем использовать в работе.

Определение 1. Функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM.

Пусть X – векторное поле, заданное на M. На TM векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ в локальных координатах определяются соотношениями:

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1, \quad X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1.$$

Здесь $\partial_i^0, \partial_i^1$ – операторы частного дифференцирования по переменным x_0^i, x_1^i соответственно.

Если на базе M задана линейная связность ∇, то на TM существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям [1, 5]:

$$\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}, \nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0.$$

Определение 2 [6]. Пусть G – тензорное поле типа (1,1) на M и $G = G_i^j \partial_j$ – его локальное представление. Векторное поле $\gamma G = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1$ называется вертикально-векторным поднятием аффинора G. В дальнейшем будем пользоваться для обозначения γG символом $G^{V\gamma}$.

Определение 3 [4]. Векторное поле $G^{H\gamma}$, заданное в локальных координатах соотношением

$$G^{H\gamma} = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^H,$$

где $\partial_j^H = \partial_j^0 - (\Gamma_{js}^p)_{(0)} x_1^s \partial_p^1$, называется горизонтально-векторным поднятием аффинора G.

Пусть K – тензорное поле типа $(1, r)$.

Определение 4. Объект $K^{H\gamma^r}$, определенный равенством

$$K^{H\gamma^r} = \left(K^i_{j_1 \dots j_r}\right)_{(0)} x_1^{j_1} \dots x_1^{j_r} D_i,$$

где $D_i = \partial_i^H$, назовем $H\gamma^r$-лифтом тензорного поля $K \in \Im_r^1(M)$.

Объект $K^{H\gamma^r}$ является векторным полем на TM; это следует из определения вертикального лифта функций, законов преобразования x_1^i и D_i.

При $r=1$ мы получим горизонтально-векторное поднятие аффинора K, а при $r=0$ – горизонтальный лифт векторного поля K с многообразия M в касательное расслоение TM.

Определение 5. Векторное поле $K^{V\gamma^r}=(K^i_{j_1\dots j_r})_{(0)}x_1^{j_1}\dots x_1^{j_r}\partial_i^1$ назовем $V\gamma^r$-лифтом тензорного поля K типа $(1,r)$. Ясно, что при $r=1$ мы получим вертикально-векторное поднятие аффинора K, а при $r=0$ – вертикальный лифт векторного поля K с M в TM.

Эти определения могут быть обобщены. Введем тензорные поля, полученные из тензорного поля K типа $(1,r)$ и тензорного поля Q типа (1,1). Определим тензорное поле $F\overset{q}{\bullet}Q$ условием

$$F\overset{q}{\bullet}Q(X_1,\dots,X_q,\dots,X_r)=F(X_1,\dots,X_{i-1},Q(X_q),\dots,X_r).$$

Тензорные поля описанного типа будут использоваться в дальнейшем.

Введем еще два лифта в касательное расслоение, которые обозначим через $H\gamma^r$, $V\gamma^r$.

Отметим тождества, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 1. γ-лифт тензорных полей типа (1,1) обладает следующими свойствами. Для любых тензорных полей P,Q типа (1,1) на M и любого скаляра $\lambda\in R$ имеют место равенства:

а) $\gamma(P+Q)=\gamma P+\gamma Q$;

б) $\gamma(\lambda Q)=\lambda\gamma Q$;

в) $[\gamma P,\gamma Q]=\gamma([P,Q])$, где $[P,Q]=P\overset{1}{\bullet}Q-Q\overset{1}{\bullet}P$.

Доказательство. Свойства (а) и (б) следуют из определения γ-лифта тензорного поля типа (1,1). Тождество (в) докажем прямыми вычислениями:

$$[\gamma P,\gamma Q]=\left[\left(P_k^m\right)_{(0)}x_1^k\partial_m^1,\left(Q_p^s\right)_{(0)}x_1^p\partial_s^1\right]=\left(P_k^mQ_m^s\right)_{(0)}x_1^k\partial_s^1-\left(Q_p^sP_s^m\right)_{(0)}x_1^p\partial_m^1=$$

$$=\left(P_k^mQ_m^s-G_k^mQ_m^s\right)_{(0)}x_1^k\partial_s^1=\left([P,Q]_k^s\right)_{(0)}x_1^k\partial_s^1=\gamma([P,Q]).$$

Предложение 2. Для любых тензорных полей P,Q типа (1,1), заданных на M, и любого скаляра $\lambda\in R$ выполняются следующие равенства:

а) $(P+Q)^{H\gamma}=P^{H\gamma}+Q^{H\gamma}$;

б) $(\lambda P)^{H\gamma}=\lambda P^{H\gamma}$;

в) $[P^{H\gamma},Q^{H\gamma}]=(\nabla Q\overset{1}{\bullet}P-\nabla\overset{1}{\bullet}Q-(T\overset{1}{\bullet}P)\overset{2}{\bullet}Q)^{H\gamma^2}-((R\overset{1}{\bullet}P)\overset{2}{\bullet}Q)^{V\gamma^3}$,

где T – тензорное поле кручения связности ∇.

Доказательство. Тождества (а) и (б) непосредственно следуют из определения $H\gamma$-лифта. Равенство (в) докажем прямыми вычислениями, используя локальные координаты:

$$\left[P^{H\gamma},G^{H\gamma}\right]=\left[\left(P_t^i\right)_{(0)}x_1^tD_i,\left(Q_s^j\right)_{(0)}x_1^sD_j\right]=\left(P_t^i\right)_{(0)}x_1^tD_i\left(\left(Q_s^j\right)_{(0)}x_1^s\right)D_j-$$

$$-\left(Q_s^j\right)_{(0)}x_1^sD_j\left(\left(P_t^i\right)_{(0)}x_1^t\right)D_i+\left(P_t^iQ_s^j\right)_{(0)}x_1^tx_1^s[D_i,D_j].$$

Учитывая, что

$$D_i\left(\left(Q_s^j\right)_{(0)}x_1^s\right)=\left(\partial_iQ_s^j\right)_{(0)}x_1^s+\left(Q_s^j\right)_{(0)}D_ix_1^s=$$

$$=\left(\partial_iQ_s^j\right)_{(0)}x_1^s-\left(Q_s^j\right)_{(0)}\left(\Gamma_{ik}^s\right)_{(0)}x_1^k=\left(\partial_iQ_k^j-Q_s^j\Gamma_{ik}^s\right)_{(0)}x_1^k,$$

а $\left(\partial_iQ_k^j-Q_s^j\Gamma_{ik}^s\right)_{(0)}x_1^k=\nabla_iQ_k^j-Q_k^s\Gamma_{is}^j$ и $[D_i,D_j]=-\left(R_{kij}^s\right)_{(0)}x_1^k\partial_s^1$,

мы получим

$$\left[P^{H\gamma},G^{H\gamma}\right]=\left(P_t^i\left(\nabla_iQ_k^j-Q_k^s\Gamma_{is}^j\right)\right)_{(0)}x_1^tx_1^kD_j-\left(Q_t^j\left(\nabla_jP_k^i-P_k^s\Gamma_{js}^i\right)\right)_{(0)}x_1^tx_1^kD_i-$$

$$-\left(P_t^iQ_l^jR_{kij}^s\right)_{(0)}x_1^tx_1^lx_1^k\partial_s^1=\left(P_t^j\nabla_jQ_k^i-Q_t^j\nabla_jP_k^i+Q_t^jP_k^s\Gamma_{js}^i-Q_k^sP_t^j\Gamma_{js}^i\right)x_1^tx_1^kD_i-$$

$$-\left(\left(R_{\bullet}^1P\right)_{\bullet}^2Q\right)^{V\gamma^3}=\left(\nabla Q_{\bullet}^1P-\nabla P_{\bullet}^1Q\right)^{H\gamma^2}-\left(\left(R_{\bullet}^1P\right)_{\bullet}^2Q\right)^{V\gamma^3}-$$

$$-\left(P_t^jQ_k^sT_{js}^i\right)_{(0)}x_1^kx_1^tD_i=\left(\nabla Q_{\bullet}^1P-\nabla P_{\bullet}^1Q-\left(T_{\bullet}^1P\right)_{\bullet}^2Q\right)^{H\gamma^2}-\left(\left(R_{\bullet}^1P\right)_{\bullet}^2Q\right)^{V\gamma^3}.$$

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования пространств $(TM,\nabla^{(0)})$

Определение 6 [3]. Векторное поле X называется инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства аффинной связности (M,∇), если

$$L_X\nabla=0, \tag{2}$$

где L_X – символ производной Ли относительно векторного поля X.

В настоящей работе мы изучаем инфинитезимальные аффинные преобразования касательного расслоения TM, снабженного связностью $\nabla^{(0)}$ полного лифта связности ∇ с нулевым тензорным полем T кручения, заданной на базе M.

Х. Шадыев в работе [2] доказал, что векторное поле $\tilde{X}$ на TM, снабженное связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$, является инфинитезимальным преобразованием тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) существуют векторные поля X, Y, тензорные поля G, F типа (1,1) на M такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + G^{V\gamma} + F^{H\gamma}; \tag{3}$$

2) имеют место равенства

$$L_X\nabla = 0, L_Y\nabla = 0, \nabla G = 0, R\overset{1}{\bullet}G - G\overset{1}{\bullet}R = 0, R\overset{1}{\bullet}F = F\overset{1}{\bullet}R = 0. \tag{4}$$

Из этого результата следует, что каждое слагаемое в разложении (3) является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Действительно, векторное поле $X^{(0)}$ можно представить следующим образом:

$$X^{(0)} = X^{(0)} + 0^{(1)} + 0^{V\gamma} + 0^{H\gamma},$$

где 0 в выражении $0^{(1)}$ является нулевым векторным полем, а 0 в последних двух слагаемых – нулевое тензорное поле типа (1,1). Равенства (4) имеют место. Следовательно, векторное поле $X^{(0)}$, входящее в разложение (3), является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Аналогичным образом доказывается, что остальные слагаемые также являются инфинитезимальными аффинными преобразованиями.

Отметим, что имеет место

Предложение 3. Для каждого инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$ пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ разложение (3) является единственным.

Доказательство. Достаточно установить, что если $\tilde{X}$ – нулевое векторное поле, то каждое слагаемое в (3) – нулевое. Пусть $p \in M$ – произвольная точка многообразия M, (U, x^i) – координатная окрестность такая, что $p \in U$. Тогда $x^i(p) = p^i$ и в каждой точке $\tilde{p}$ слоя над ней $\tilde{X}_{\tilde{p}} = 0$. Выберем в слое $\pi^{-1}(p)$ n линейно-независимых касательных векторов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n$. В координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ будем иметь $x_0^i(\tilde{p}_s) = p^i, x_1^i(\tilde{p}_s) = (p_1^i)_s$, причем матрица, строками которой являются наборы $(p_1^i)_s (s = 1,2,...,n)$, является невырожденной. Из условия $\tilde{X}_{\tilde{p}_s} = 0$ имеем

$$X^{(0)}_{\tilde{p}_s} x_0^i + F^{H\gamma}_{\tilde{p}_s} x_0^i = 0.$$

Отсюда следует, что $X^i(p) + F_j^i(p)\left(p_1^j\right)_s = 0.$

Запишем эти равенства для точек $\lambda\tilde{p}_s, \lambda \neq 1,$ тогда

$$X^i(p) + \lambda\left(F^i_j(p)\left(p^j_1\right)_s\right) = 0.$$

Следовательно, $(\lambda - 1)F^i_j(p)\left(p^j_1\right)_s = 0.$ Поэтому $F^i_j(p)\left(p^j_1\right)_s = 0$. Отсюда в силу линейной независимости векторов $(p^j_1)_s$, получим $F^i_j(p) = 0.$ Тогда и $X^i(p) = 0.$ Учитывая эти равенства, воспользуемся равенством $\tilde{X}_{\tilde{p}_s} x^i_1 = 0$. Тогда $Y^i(p) + G^i_j(p)(p^j_1)_s = 0$. Отсюда, рассуждая аналогично предыдущим рассуждениям, получим $Y^i(p) = 0, G^i_j(p) = 0.$ Таким образом, имеем $X^{(0)}_{\tilde{p}} = 0, Y^{(1)}_{\tilde{p}} = 0, G^{V\gamma}_{\tilde{p}} = 0, F^{H\gamma}_{\tilde{p}} = 0$ для любой точки $\tilde{p}$.

Пусть $\tilde{X} = X^{(0)}_1 + Y^{(1)}_1 + G^{V\gamma}_1 + F^{H\gamma}_1$, $\tilde{X} = X^{(0)}_2 + Y^{(1)}_2 + G^{V\gamma}_2 + F^{H\gamma}_2$ – два разложения инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$. Вычитая из первого равенства второе и учитывая свойства лифтов, используемых в этих разложениях, получим

$$0 = (X_1 - X_2)^{(0)} + (Y_1 - Y_2)^{(1)} + (G_1 - G_2)^{V\gamma} + (F_1 - F_2)^{H\gamma}.$$

Доказанное выше свойство позволяет получить

$$X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, G_1 = G_2, F_1 = F_2.$$

Тем самым предложение 3 доказано.

3. Строение алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$

Пусть $\tilde{L}$ – множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$. Это множество относительно естественных операций сложения, умножения на скаляры из R и операции коммутирования образует алгебру Ли, размерность которой не больше $2n(2n+1)$, где n – размерность многообразия M.

Рассмотрим подмножества $L^\alpha(\alpha = 0,1,2,3)$ векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}$, $G^{V\gamma}$, $F^{H\gamma}$ соответственно.

Из свойств лифтов, указанных здесь, заключаем, что каждое из этих подмножеств векторного пространства $\tilde{L}$ замкнуто относительно операции сложения и умножения на скаляры. Поэтому $L^\alpha(\alpha = 0,1,2,3)$ являются подпространствами векторного пространства $\tilde{L}$. Учитывая строение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(TM, \nabla^{(0)})$, заключаем, что $\tilde{L}$ является суммой этих подпространств. На основании предложения 3 имеем, что эта сумма является прямой суммой подпространств $L^\alpha(\alpha = 0,1,2,3)$. Таким образом, имеет место

Предложение 4. Векторное пространство $\tilde{L}$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM,\nabla^{(0)})$ является суммой подпространств $L^{\alpha}(\alpha=0,1,2,3)$.

В качестве следствия этого предложения имеем

$$dim\tilde{L} = dimL^0 + dimL^1 + dimL^2 + dimL^3.$$

На основании тождества $L_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{\nabla} = L_{\tilde{X}} \circ L_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla} - L_{\tilde{Y}} \circ L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}$ для производной Ли линейной связности заключаем, что коммутатор любых двух инфинитезимальных аффинных преобразований является инфинитезимальным аффинным преобразованием. Из этого свойства инфинитезимальных аффинных преобразований и свойства полного, вертикального лифтов векторных полей имеем: для любых инфинитезимальных аффинных преобразований $X^{(0)},Y^{(0)}$ их коммутатор $[X^{(0)},Y^{(0)}]$ является инфинитезимальным аффинным преобразованием и $[X^{(0)},Y^{(0)}]=[X,Y]^{(0)}$. Это означает, что подпространство L^1 является подалгеброй алгебры $\tilde{L}$.

Так как $[X^{(1)},Y^{(1)}]=0$, то L^2 также является подалгеброй алгебры $\tilde{L}$, причем абелевой. На основании предложения 1 (в) заключаем, что L^2 является подалгеброй алгебры $\tilde{L}$. Из предложения 2 и тождеств (4) следует, что L^3 также является подалгеброй алгебры $\tilde{L}$, причем абелевой. Тем самым доказано

Предложение 5. Подпространства $L^{\alpha}(\alpha=0,1,2,3)$ пространства $\tilde{L}$ являются подалгебрами алгебры Ли $\tilde{L}$, причем подалгебры L^1 и L^3 абелевы.

Пусть $g(\nabla)$ – алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M,∇). На основании свойств полного и вертикального лифтов векторных полей с M в TM можно доказать

Предложение 6. Векторные пространства L^0,L^1 изоморфны векторному пространству $g(\nabla)$. Отсюда заключаем, что $\dim L^0 = \dim L^1 = \dim g(\nabla) = r$. Поэтому

$$\dim\tilde{L} = 2r + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Отметим также еще одно предложение, которое доказывается на основании свойств полного лифта векторных полей.

Предложение 7. Подалгебра L^0 алгебры $\tilde{L}$ изоморфна алгебре Ли $g(\nabla)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h: g(\nabla) \to L^0$, заданное условием $h(X) = X^{(0)}$. Тогда для любых $\lambda,\mu \in R$, $X,Y \in g(\nabla)$ $h(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X)^{(0)} + (\mu Y)^{(0)} = \lambda h(X) + \mu h(Y)$. Очевидно, что h сюръективно.

Покажем инъективность h. Пусть $X^{(0)} = 0$. Для любой точки $p \in M$ имеем для $\tilde{p}$ над p $X^{(0)}_{\tilde{p}} = 0$. Поэтому $X^{(0)}_{\tilde{p}} x^0_i = 0$. Отсюда $(Xx^i)_{(0)}(\tilde{p}) = 0$.

Так как $\tilde{p} = \pi(p)$, то $(Xx^i)(p) = 0$. Это значит, что $X^i(p) = 0$, т.е. $X_p = 0$ для любой точки $p \in M$. Инъективность отображения h доказана. Далее,

$$h([X,Y]) = [X,Y]^{(0)} = [X^{(0)}, Y^{(0)}] = [h(X), h(Y)].$$

Таким образом, h – изоморфизм.

4. О разрешимости алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов расслоения $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально подвижным двумерным пространством

Данный раздел посвящен исследованию алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над одним из максимально подвижных двумерных пространств (M_2, ∇).

В работе [7] показано, что если пространство (M_2, ∇) обладает группой движений максимальной размерности, то группа движений пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ имеет размерность

$$\tilde{r} = 8 + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Поэтому для нахождения размерности алгебры Ли $\tilde{L}$ необходимо установить размерности ее подалгебр L^2 и L^3.

Теорема 1 [7]. Алгебра Ли L^3 инфинитезимальных аффинных преобразований вида $F^{H\gamma}$ является нульмерной, если база M является двумерной.

Таким образом, общий вид алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований изучаемых пространств $(TM_2, \nabla^{(0)})$ имеет вид

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G,$$

где $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$, $G \in \mathfrak{I}_1^1(M)$.

В работе [7] показано также, что совокупность решений дифференциального уравнения $\nabla G = 0$ для двумерных максимально подвижных пространств аффинной связности ненулевой кривизны является двумерной алгеброй Ли.

Однако, если векторное поле γG входит в каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования, то аффинор G удовлетворяет еще следующим алгебраическим соотношениям, которые следуют из равенства $\overset{1}{R}\bullet G - G\bullet\overset{1}{R} = 0$: $G_j^s R_{ksl}^i - G_s^i R_{kjl}^s = 0$.

Поэтому пространство решений уравнения $\nabla G = 0$ в этом случае является одномерным. Следовательно базис алгебры Ли L^2 состоит из одного векторного поля Лиувилля на TM

$$K = x_1^j \partial_j^1. \qquad (5)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Алгебра Ли всех инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM_2, снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.

Учитывая, что размерность группы Ли преобразований многообразия равна размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований [8], мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Группа движений касательного расслоения TM_2, снабженного полным лифтом максимально подвижной аффинной связности с ненулевым тензорным полем кривизны, имеет размерность 9.

И. П. Егоровым доказано, что существует три типа двумерных пространств аффинной связности (M_2,∇), группы движений которых имеют максимальную размерность 4 [3].

Рассмотрим пространство (M_2,∇), определенное коэффициентами связности

$$(\Gamma^1_{mk})=\begin{pmatrix}2a+1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},(\Gamma^2_{mk})=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где a – произвольная постоянная.

Составляющие тензора Риччи:

$$R_{11}=-a(2a+1),R_{12}=R_{21}=R_{22}=0.$$

Базис алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований рассматриваемого пространства составляют векторные поля:

$$X_1=\partial_1,X_2=x^2\partial_2,X_3=e^{x^1}\partial_2,X_4=\partial_2. \tag{7}$$

Для получения базисных векторных полей алгебры Ли $\tilde{L}$ найдем вертикальные и полные лифты векторных полей (7).

Вертикальные лифты $X^{(1)}$ векторных полей (7), обозначаемые через Y, будут иметь вид

$$Y_1=\partial^1_1,\quad Y_2=x^2_0\partial^1_2,\quad Y_3=e^{x^1_0}\partial^1_2,\quad Y_4=\partial^1_2. \tag{8}$$

Полные лифты $X^{(0)}=Z$ векторных полей (7) определяются соотношениями:

$$Z_1=\partial^0_1,\quad Z_2=x^2_0\partial^0_2+x^2_1\partial^1_2,\quad Z_3=e^{x^1_0}\partial^0_2+x^1_1e^{x^1_0}\partial^1_2,\quad Z_4=\partial^0_2. \tag{9}$$

Прежде чем решить вопрос о разрешимости алгебры Ли $\tilde{L}$, приведем определение разрешимой алгебры Ли.

Пусть L – алгебра Ли. Определим следующую последовательность идеалов алгебры L (производный ряд):

$$L^{(0)}=L,L^{(1)}=[L,L],L^{(2)}=\left[L^{(1)},L^{(1)}\right],...,L^{(i)}=\left[L^{(i-1)},L^{(i-1)}\right].$$

Определение 7 [8]. Алгебра Ли L называется разрешимой, если $L^{(n)}=0$ при некотором n.

Для нахождения первой производной алгебры Ли $\tilde{L}$ вычислим коммутаторы вида $\left[\gamma G, X^{(1)}\right]$, $\left[\gamma G, X^{(0)}\right]$, $\left[X^{(1)}, Y^{(0)}\right]$, $\left[X^{(0)}, Y^{(0)}\right]$ векторных полей (5), (8), (9), используя их свойства.

Из свойства коммутаторов $\left[\gamma G, X^{(1)}\right]=-(G(X))^{(1)}$ получим

$$[K,Y_1]=-\partial_1^1=-Y_1,\ [K,Y_2]=-x_0^2\partial_2^1=-Y_2.$$

$$[K,Y_3]=-e^{x_0^1}\partial_2^1=-Y_3,\ [K,Y_4]=-\partial_2^1=-Y_4.$$

Вычислим коммутаторы вида $\left[\gamma G, X^{(0)}\right]=\gamma(L_X G)$, будем иметь

$$[K,Z_1]=0,\ [K,Z_2]=0,\ [K,Z_3]=0,\ [K,Z_4]=\left[x_1^j\partial_j^1,\partial_2^0\right]=0.$$

Так как $\left[X^{(1)}, Y^{(0)}\right]=[X,Y]^{(1)}$, то

$$[Y_1,Z_1]=0,\ [Y_1,Z_2]=0,\ [Y_1,Z_3]=e^{x_0^1}\partial_2^1=Y_3,\ [Y_1,Z_4]=0;$$

$$[Y_2,Z_1]=0,\ [Y_2,Z_2]=0,\ [Y_2,Z_3]=-e^{x_0^1}\partial_2^1=-Y_3,\ [Y_2,Z_4]-\partial_2^1=-Y_4;$$

$$[Y_3,Z_1]=-e^{x_0^1}\partial_2^1=-Y_3,\ [Y_3,Z_2]=e^{x_0^1}\partial_2^1=Y_3,\ [Y_3,Z_3]=0,\ [Y_3,Z_4]=0;$$

$$[Y_4,Z_1]=0,\ [Y_4,Z_2]=\partial_2^1=Y_4,\ [Y_4,Z_3]=0,\ [Y_4,Z_4]=0.$$

Вычислим коммутаторы вида $[X^{(0)},Y^{(0)}]=[X,Y]^{(0)}$:

$$[Z_1,Z_2]=0,\ [Z_1,Z_3]=e^{x_0^1}\partial_2^0+e^{x_0^1}x_1^1\partial_2^1=Z_3,\ [Z_1,Z_4]=0,$$

$$[Z_2,Z_3]=-e^{x_0^1}\partial_2^0-e^{x_0^1}x_1^1\partial_2^1=-Z_3,\ [Z_2,Z_4]=-\partial_2^0=-Z_4,\ [Z_3,Z_4]=0.$$

Таким образом, мы получили следующие структурные соотношения алгебры Ли $\tilde{L}$ пространства $(TM_2,\nabla^{(0)}$ над пространствами аффинной связности типа 1:

$$[Y_i,K]=Y_i(i=1,2,3,4),\ [Y_1,Z_3]=Y_3,\ [Y_2,Z_3]=-Y_3,$$

$$[Y_2,Z_4]=-Y_4,\ [Y_3,Z_1]=-Y_3,\ [Y_3,Z_2]=Y_3,$$

$$[Y_4,Z_2]=Y_4,\ [Z_1,Z_3]=Z_3,\ [Z_2,Z_3]=-Z_3,\ [Z_2,Z_4]=-Z_4.$$

Здесь указаны лишь коммутаторы, отличные от нуля. Отсюда заключаем, что производная алгебра $\tilde{L}'$ алгебры Ли $\tilde{L}$ является линейной оболочкой векторных полей:

$$Y_i (i = 1,2,3,4), Z_3, Z_4. \qquad (10)$$

Вычислим вторую производную для алгебры Ли $\tilde{L}$, для этого найдем коммутаторы векторных полей (10):

$$[Y_i, Y_j] = 0,\ [Y_1, Z_3] = Y_3,\ [Y_1, Z_4] = 0,\ [Y_2, Z_3] = -Y_3,\ [Y_2, Z_4] = -Y_4,$$

$$[Y_3, Z_3] = 0,\ [Y_3, Z_4] = 0,\ [Y_4, Z_3] = 0,\ [Y_4, Z_4] = 0,\ [Z_3, Z_4] = 0.$$

Отсюда следует, что вторая производная алгебра $\tilde{L}''$ алгебры Ли $\tilde{L}$ будет линейной оболочкой векторных полей Y_3, Y_4. Коммутатор этих векторных полей будет равен нулю, поэтому третья производная алгебра $\tilde{L}''' = \{0\}$. Таким образом, доказана

Теорема 4. Алгебра Ли $\tilde{L}$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM_2, \nabla^{(0)})$ над максимально-подвижным двумерным пространством (M_2, ∇), определяемым коэффициентами связности (6), является разрешимой.

Список литературы

1. **Yano, K.** Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry / K. Yano, S. Ishihara. – New York, Marcel Dekker, 1973. – 423 p.
2. **Шадыев, Х.** Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении / Х. Шадыев // Труды геометрического семинара. – 1984. – Т. 16. – С. 117–127.
3. **Егоров, И. П.** Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности / И. П. Егоров // Ученые записки Пензенского педагогического института. – Казань : Изд-во Казанского гос. ун-та, 1965. – С. 5–179.
4. **Tanno, S.** Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric / S. Tanno // Tensor, N.S. – 1974. – Vol. 28. – P. 139–144.
5. **Султанов, А. Я.** Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля / А. Я. Султанов // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 64–72.
6. **Sato, J.** Complete lifts from a manifold tangent bundle / J. Sato // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – Vol. 20. – № 4. – P. 458–468.
7. **Султанова, Г. А.** О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально-подвижными пространствами аффинной связности / Г. А. Султанова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Вып. 46. – Калининград, 2015. – С. 153–161.
8. **Понтрягин, Л. С.** Непрерывные группы : моногр. / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, Физматлит, 1973. – 527 с.

References

1. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential Geometry*. New York, Marcel Dekker, 1973, 423 p.
2. Shadyev Kh. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proceedings of a geometrical seminar]. 1984, vol. 16, pp. 117–127.
3. Egorov I. P. *Uchenye zapiski Penzenskogo pedagogicheskogo instituta* [Proceedings of Penza Pedagogical Institute]. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. un-ta, 1965, pp. 5–179.
4. Tanno S. *Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric*. Tensor, N.S. 1974, vol. 28, pp. 139–144.

5. Sultanov A. Ya. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1999, no. 9, pp. 64–72.
6. Sato J. *Kodai Math. Semin. Repts*. 1968, vol. 20, no. 4, pp. 458–468.
7. Sultanova G. A. *Differentsial'naya geometriya mnogoobraziy figur* [Differential geometry of figure manifold]. Issue. 46. Kaliningrad, 2015, pp. 153–161.
8. Pontryagin L. S. *Nepreryvnye gruppy: monogr.* [Continuous groups: monograph]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1973, 527 p.

Султанова Галия Алиевна
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Sultanova Galiya Alievna
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: sultgaliya@yandex.ru

УДК 514.76

Султанова, Г. А.

Об алгебрах Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта / Г. А. Султанова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 4 (40). – С. 38–50. DOI 10.21685/2072-3040-2016-4-4